Методические рекомендации по решению задач по предмету «Математика»

Задания блока математика представлены 5 задачами с кратким ответом. Каждое задание имеет базовый уровень сложности и оценивается в 5 баллов. Максимальный балл за выполнение задания выставляется при условии, что учащийся указал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. В противном случае задание оценивается в 0 баллов.

Задание 1-3. Табличное и графическое представление данных. Решение задач практического содержания, в том числе на выбор оптимального варианта.

Контролируемые требования к проверяемым умениям:

Решение задач практического содержания, в том числе, на выбор оптимального варианта.

Задачи оптимизации.

Оптимизация – это процесс нахождения наилучшего решения задачи, определяемого по некоторому заранее установленному критерию.

Всевозможные устройства, процессы и ситуации, применительно к которым предстоит решать задачу оптимизации, называют объектом оптимизации.

Решение любой задачи оптимизации начинают с выявления цели оптимизации, т. е. формулировки требований, предъявляемых к объекту оптимизации. От того, насколько правильно выражены эти требования, может зависеть возможность решения задачи.

В случае, когда достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом ставится цель выбрать наилучший из возможных способов. Однако в различных ситуациях наилучшими могут быть совершенно разные решения. Все зависит от выбранного или заданного критерия.

Для решения задач оптимизации нужно располагать ресурсами оптимизации, под которыми понимают свободу выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта. Иначе говоря, объект оптимизации имеет определенные степени свободы, которые позволяют изменять его состояние в соответствии с требованиями.

Одним из наиболее важных показателей правильной постановки задачи оптимизации является критерий оптимальности. Критерий оптимальности - признак, по которому функционирование системы признается наилучшим из возможных вариантов.

Подчеркнем, что для правильной постановки задачи на оптимальный выбор необходимо выполнение следующих условий:

1) Требование оптимизации только одной величины;

2) Наличие степеней свободы у оптимизируемого объекта;

3) Возможность количественной оценки оптимизируемой величины.

С задачами на оптимальный выбор мы сталкиваемся чаще, чем может показаться на первый взгляд. Когда в магазине пытаемся немного сэкономить деньги, когда ищем лучшую модель гаджета по соотношению цена – качество или планируем путешествия, выбирая разные маршруты и способы передвижения. В большинстве обычных бытовых вопросов нам хочется я получить выгоду, лучший результат при минимальном количестве вложений и трудозатрат, и задачи на оптимизацию как раз про это.

Данный блок задач проверяет умение учащихся работать с практической информацией, анализировать данные, обрабатывать их отделяя важные от второстепенных в зависимости от условий задачи, строить верные логические рассуждения, учитывать разные типы условий и подбирать оптимальное решение для каждой ситуации.

При решении первых трех заданий учащимся предлагается следующий алгоритм действий.

1. Внимательное и вдумчивое чтение текста задачи.
2. Акцентирование внимания на вопросе задачи.
3. Сортировка информации с точки зрения ее важности или второстепенности, применительно к рассматриваемому вопросу.
4. Формирование гипотез и их исследование. Изучение всех альтернативных вариантов.
5. Выбор гипотезы наиболее соответствующей критерию оптимальности.

Задания 1-3

Администратор гостиницы на спортивной базе должен разместить группу ватерполисток в количестве 37 человек, приезжающих на сборы. Размещать необходимо максимально плотно, так как на сборы скоро приедут другие спортсмены. Разместить нужно так, чтобы не оставалось свободных мест в занятых номерах. Цены номеров и их количество указаны в таблице.

	1-местные	**2-местные**	**3-местные**
Количество номеров, шт.	9	13	7
Цена номера, руб.	4000	7000	9000

Задание 1

Какое наименьшее число номеров сможет задействовать администратор при условии, что в занятых номерах не должно оставаться свободных мест? В ответе укажите только число.

Решение.

Объектом оптимизации в данной задаче является количество номеров, которые займут ватерполистки.

Цель оптимизации — минимизировать количество занятых номеров.

При решении задачи важными являются следующие условия:

- количество спортсменок, которых необходимо разместить: 37 человек;
- заполненность номера (т.е. в номерах не остается свободных мест);
- количество номеров различной вместимости согласно таблице.

Заметим, что стоимость размещения при решении задачи 1 типа не учитывается.

Рассмотрим возможные варианты размещения спортсменок учитывая описанные выше условия. Так как требуется занять наименьшее количество номеров не учитывая стоимость размещения, то целесообразно в первую очередь занять все наиболее вместительные номера.

В 7 трехместных номеров мы разместим 7*3=21 спортсменку.

Остается 37-21=16 спортсменок, которых нужно разместить в следующие по вместительности (двухместные) номера 16:2=8 номеров будет занято. Всего при таком размещении будет занято 7+8=15 номеров отеля.

Ответ: 15

Задание 2

Какое наименьшее число двухместных номеров он сможет задействовать при заданных условиях? В ответе укажите только число.

Решение.

Объектом оптимизации в данной задаче является количество двухместных номеров, которые займут ватерполистки.

Цель оптимизации - минимизировать количество занятых двухместных номеров.

При решении задачи важными являются следующие условия:

- количество спортсменок, которых необходимо разместить: 37 человек;
- заполненность номера (т.е. в номерах не остается свободных мест);
- количество номеров различной вместимости согласно таблице.

Заметим, что стоимость размещения при решении задачи 2 типа не учитывается.

Рассмотрим возможные варианты размещения спортсменок учитывая указанные выше условия.

Так как требуется занять наименьшее количество двухместных номеров, не учитывая при этом стоимость размещения, то целесообразно в первую очередь занять все трех- и одноместные номера.

Гипотеза 1: в 7 трехместных номеров мы разместим 7*3=21 спортсменку. Останется 37-21=16 спортсменок. Если 9 из них будут размещены в одноместных номерах, то мы нарушим условие максимальной наполняемости номера, так как оставшиеся 7 человек не займут полностью 4 двухместных гостиничных номера. Следовательно, для выполнения условия заполняемости будем размещать в 3-местных номерах 21 человека, в 1-х - 8 человек и 8 человек в двухместных. Следовательно, количество занятых двухместных номеров при таком расселении — 4.

Гипотеза 2: здесь также имеет смысл исследовать ситуацию с альтернативным вариантом размещения, когда 9 спортсменок займут все одноместные номера, оставшиеся 28 человек должны быть распределены по 2-х и 3-х местным номерам. Максимальное количество трехместных номеров 7, что позволяет вместить 21 человека, но остается 7 девушек которых невозможно разместить в 2х местных номерах не нарушая условие заполняемости. Если же по 3-х местным номерам расселить только 18 спортсменок, то оставшиеся 10 человек займут 5 двухместных номеров, что больше, чем в первом варианте.

Ответ: 4

Задание 3

Какую наибольшую суточную выручку может получить гостиница за проживание ватерполисток при условии, что гостей необходимо разместить так, чтобы не оставалось свободных мест в занятых номерах? В ответе укажите только число.

Решение.

Объектом оптимизации в данной задаче является наибольшая суточная выручка, которую может получить гостиница за проживание ватерполисток.

Цель оптимизации - максимизировать суточную выручку.

При решении задачи важными являются следующие условия:

- количество спортсменок, которых необходимо разместить: 37 человек;
- заполненность номера (т.е. в номерах не остается свободных мест);
- количество номеров различной вместимости и стоимость размещения в них согласно таблице.

Чтобы определить наибольшую суточную выручку сравним сколько денег получает гостиница за каждого гостя в зависимости от варианта его размещения.

Стоимость проживания одного человека в номере указанной категории:

1-местном: 4000 рублей;

2-местном: 7000:2=3500 рублей;

3-местном: 9000:3=3000 рублей.

Для получения наибольшей прибыли администратору выгодно разместить наибольшее число людей в одноместных и двухместные номерах.

Гипотеза 1: 9*1-х и 13*2-х

Стоимость размещения 9 человек в одноместных номерах составит 9*4000=36000 рублей.

Максимальное количество людей, которое поместится в двухместные номера - 13*2=26, но тогда нарушится условие заполняемости номеров, так как останется 37-(26+9)=2 человека, которых невозможно поселить в трехместный номер.

Таким образом, необходимо выделить несколько трехместных номеров, чтобы все номера оказались полностью заполнены.

Гипотеза 2: 9*1-х и 1*3-х

1 трехместный номер выделить не получится, так как останется 37-(9+3)=25 человек, которых невозможно расселить по двухместным номерам с условием полного заполнения.

Гипотеза 3: 9*1-х и 2*3-х

Тогда возьмем 2 трехместных номера, останется 37-(9+6)=22 человека, которые займут ровно 11 двухместных номеров.

В данном случае, суточная выручка гостиницы составит:

9*4000+11*7000+2*9000=36000+77000+18000=131 000.

Гипотеза 4: 8*1-х и 1*3-х

Стоимость размещения 8 человек в одноместных номерах составит 8*4000=32000 рублей. За размещение 3 человек в одном трехместном номере мы получим 9000 рублей, останется разместить 37-(8+3)=26 человек, которые займут ровно 13 двухместных номеров стоимостью 13*7=91000.

Суточная выручка в данном случае составит: 32000+9000+91000=132 000 рублей.

Гипотеза 4 наиболее соответствует критерию оптимальности.

Ответ: 132 000

Задания 4-5

Решение задач с применением изученных фактов о делимости целых чисел, свойств модуля числа, корней и степеней с рациональным показателем, преобразований числовых и алгебраических выражений; операций с долями, частями и процентами

Доли, части и проценты.

Одним из базовых понятий в математике является процент.

Проце́нтом называют сотую часть целого принимаемого за единицу и обозначают символом %.

Как в точных и экономических науках, так и в других сферах жизни проценты используются для обозначения долей по отношению к целому. При этом само целое обозначается как 100%. В некоторых случаях проценты используется при сравнении двух величин: например, иногда стоимость товаров не сравнивается в денежных единицах, а оценивается, на сколько % цена одного товара больше или меньше цены другого. Термин также получил широкое распространение в банковском деле и в большинстве случаев используется в качестве синонима словосочетания «процентная ставка».

Процентное сравнение величин.

При сравнении двух величин за 100% принимается та величина, с которой производится сравнение. В задачах на проценты сначала следует понять, какая величина принимается за 100%.

Формула для расчета разницы в процентах между двумя величинами:

Разница в процентах между величинами = 100 * (b - a) / a,

где a - первое число; b - второе число.

Положительное значение означает, что вторая величина больше первой на расчетный процент.

Отрицательное значение означает, что вторая величина меньше первой на расчетный процент.

Основные принципы решения экономико-математических задач на проценты и дроби.

В процессе решения удобно пользоваться долями или коэффициентами, а символ % использовать только при записи ответа.

При решении задач на проценты важно правильно выбрать величину, которую вы примите за 100%. Удобно, если с этой величиной сравниваются и все остальные показатель встречающиеся в задаче.

Утверждение “величина A на x% больше (меньше) величины B” не эквивалентно утверждению “величина B на x% меньше (больше) величины A”.

Задание 4

5 тонн яблок стоит столько же, сколько 3 тонны груш, а 10 тонн груш стоят столько же, сколько 7 тонн черешни. На сколько процентов самый дешевый фрукт дешевле самого дорогого? В ответе укажите только число.

Решение.

Введем обозначения.

	груши	яблоки	черешня

Цена за 1 тонну	x	y	z

Составим математическую модель задачи записав условия, как систему уравнений: $\begin{cases}3x = 5y\\ 10x = 7z.\end{cases}$ $\begin{cases}x = \frac{5}{3}y\\ x = \frac{7}{10}z.\end{cases}$

Заметим, что стоимость яблок и черешни связана со стоимостью груш. Выразим стоимость 1 тонны груш как долю от стоимости 1 тонны яблок и 1 тонны черешни. Сравним стоимость яблок и стоимость черешни.

Следовательно, 50y=21z и y=0.42z.

Таким образом, если стоимость черешни, как самого дорогого фрукта принять за 100%, стоимость самого дешевого фрукта - яблок будет 42%, получаем, что яблоки на 58% дешевле чем черешня.

Ответ: 58

Множества и их графическая интерпретация.

Мно́жество — одно из ключевых понятий математики; представляющее собой набор, совокупность каких-либо объектов — элементов этого множества.

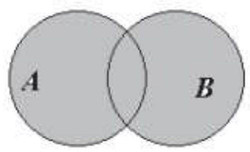
Множество A называется подмножеством множества B, если любой элемент множества A является элементом из B.

Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

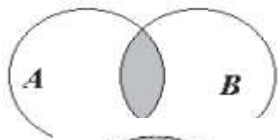
Одним из наиболее полезных и наглядных инструментов для работы с множествами являются Круги Эйлера, т.е. простая диаграмма, с помощью которой можно показать отношения между общим и его частями.

Операции над множествами.

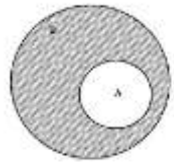
Объединением множеств A U B является множество, состоящее из элементов, принадлежащих каждому множеству.



Пересечение A ∩ B двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим исходным множествам.



Дополнением множества *A* до множества *B* называется множество, содержащее все элементы множества B, которые не принадлежат множеству *A*.



Более того, круги Эйлера помогают увидеть логические цепочки между явлениями и понятиями. Данный подход применяют для упрощения решения задач во многих областях: от математики до менеджмента.

При решении заданий 5 типа учащимся рекомендуется изобразить указанные в задаче множества в виде кругов Эйлера. Данный подход обеспечивает наглядность данных, упрощает анализ ситуации и построение цепочки логических рассуждений.

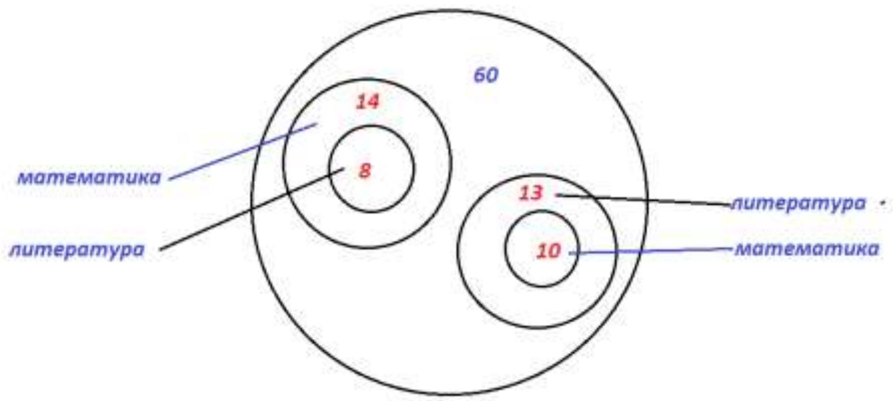
Задание 5

Известно, что в параллели 60 учеников, которые распределены между классами А и Б. В школе проводится два факультатива – по математике и литературе. Известно, что из класса А на математику ходят 14 школьников, а из класса Б – 10. В то время как на литературу записались 8 и 13 школьников из класса А и Б соответственно. Какое максимально возможное значение доли школьников, которые вообще не посещают факультативы при условии, что можно ходить на оба факультатива одновременно? В ответе укажите только число, отделяя целую часть запятой.

Решение.

Для нахождения максимальной возможной доли учеников не посещающих факультативы нужно предположить, что в каждом классе максимально возможное число ребят посещает два занятия сразу.

Круги Эйлера, нарисованные ниже, дают наглядную геометрическую интерпретацию условий задачи. Так, самый большой круг представляет собой множество всех учащихся параллели. Мы не знаем каким образом 60 человек разделили на классы А и Б, поэтому выделить их как подмножества, указав конкретное количество учеников не можем. Однако, этот факт ни как не влияет на решение. Выделим среди учащихся параллели подмножества тех учеников из классов А и Б, что посещают факультативы по математике и литературе. Необходимо, чтобы эти подмножества занимали как можно меньшую часть от исходного круга, тогда, количество тех, кто занятия не посещает (дополнение до всего множества) будет максимальным. Учитывая, что все посещающие факультатив по математике могут ходить на занятия по литературе и наоборот, получаем следующую схему.



Сосчитаем наименьшее количество детей, посещающих хотя бы один кружок. В классе А 14 учеников посещает хотя бы одно занятие. В Б классе факультативы посещают минимум 13 учащихся.

Заметим, что учащиеся из классов А и Б между собой не пересекаются. Тогда из всей параллели в кружках занимается минимум 14+13=27 человек, следовательно, максимум 33 человека из параллели кружки не посещают, таким образом, максимально возможное значение доли школьников, которые вообще не посещают факультативы при условии, что можно ходить на оба факультатива одновременно 33/60=0,55.

Ответ: 0,55

Возможные ошибки и меры их профилактики.

При решении задач, связанных с оптимальным выбором наиболее вероятные ошибки связаны:

а) с нарушением правила единственности при выборе объекта оптимизации (например, стремление одновременно выбирать и наименьшее количество номеров и их наименьшую стоимость)

b) с построением гипотез и их проверкой (когда рассмотрены не все возможные варианты наиболее подходящие под требования задачи, а лишь некоторые из них).

c) с учетом ограничений, предъявляемых в условии задачи к объекту оптимизации (например, заполняемость номеров является важным критерием отбора гипотез).

Для преодоления данных трудностей учащимся предлагается следовать предложенному выше алгоритму решения практических задач, связанных с поиском оптимального варианта.

При решении задания типа 4 наиболее вероятные ошибки возникают из-за неверного выбора базы сравнения, т.е. той величины, которую мы принимаем за 100%. Для профилактики данной ошибки рекомендуется внимательно прочитать вопрос задачи и выяснить, с какой именно величиной необходимо сравнивать. Например, в задании демоварианта за базу сравнения принята стоимость 1 тонны черешни, а стоимость тонны яблок составляет 42% от этой величины.

В заданиях 5 типа трудности могут возникнуть с понимание того, как именно достигнуть наибольшей возможной доли учащихся, не посещающих кружки. Построение кругов Эйлера позволяет наглядно ответить на данный вопрос, считая, что занята выделенными подмножествами, должна быть минимальная часть от исходного множества.